

WP7 : OUTILS POUR LA DISCRETISATION DE LA REPRESENTATION CONTINUE

RAPPORT N° CS/311-1/AJ000212/RAP/02/04/04 Version 1.1

Préparé par

CS SI

Division Opérationnelle Ingénierie Scientifique
Centre Opérationnel France Nord
16 avenue Galilée
92350 LE PLESSIS ROBINSON

Rédigé dans le cadre du projet



	NOM(S)	DATE(S)	VISA(S)
REDACTEUR(S)	Michel NAKHLE	29/05/02	
VERIFICATEUR(S)	P PICARD (SITIA)		
APPROBATEUR	A ABDALLAH (SITIA)		

FICHE DE SUIVI DES MODIFICATIONS

Version/Révision		Références		Description des modifications	Auteur(s)
Indice	Date	Page	N° §		
0.1	26/02/02			Draft incomplet diffusé à SITIA pour la réunion du 1/3/2002 à Nantes	Michel NAKHLE
1.0	19/04/02			Version diffusable au sein du projet	Michel NAKHLE
1.1	29/05/02	5, 10, 15, 17, 18		Prise en compte partielle des remarques de Pascal Picard. Reste à faire : p 23 et § 5.2.1 et 5.2.2	Michel NAKHLE



**WP7 : Outils pour la discrétisation de la
représentation continue**

**CS/311-
1/AJ000212/RAP/02/0
4/04 Version 1.1**

LISTE DE DIFFUSION

DIFFUSION EXTERNE

Pascal PICARD

SITIA, pour vérification

Ahmed ABDALLAH

SITIA, pour approbation

Partenaires du projet ACOTRIS

DIFFUSION INTERNE

Charles MODIGUY

SCSA

Nhan TRUONG TRUNG

SCSA

Archivage DO

SCSA



**WP7 : Outils pour la discrétisation de la
représentation continue**

**CS/311-
1/AJ000212/RAP/02/0
4/04 Version 1.1**

DOCUMENTS APPLICABLES ET DE REFERENCE

DOCUMENTS APPLICABLES

DA1

DOCUMENTS DE REFERENCE

- DR1 Dossier de Conception Préliminaire Projet ACOTRIS Application Projet N°2 Appareil Propulsif d'un navire à cycle combiné
- DR2 Dossier de Conception Détaillée Projet ACOTRIS Application Projet N°2 Appareil Propulsif d'un navire à cycle combiné
- DR3 Cahier de Validation Interne Projet ACOTRIS Simulation de l'appareil Propulsif d'un navire à cycle combiné

SOMMAIRE

1. INTRODUCTION.....	7
1.1 OBJECTIFS DU RAPPORT.....	7
1.2 RAPPELS DU CONTEXTE.....	7
2. TRANSFORMEE DE LAPLACE	9
2.1 DEFINITIONS.....	9
2.2 PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE.....	9
2.2.1 LINEARITE	9
2.2.2 DERIVATION	9
2.2.3 INTEGRATION.....	10
2.2.4 RETARD	10
2.2.5 MODIFICATION D'ECHELLE	10
2.2.6 TRANSLATION DANS LE DOMAINE COMPLEXE.....	10
2.2.7 CONVOLUTION.....	11
2.2.8 THEOREME DE LA VALEUR INITIALE.....	11
2.2.9 THEOREME DE LA VALEUR FINALE	11
2.3 TRANSFORMEE DE LAPLACE DES FONCTIONS USUELLES.....	11
2.4 TABLE SUCCINCTE DES TRANSFORMEES DE LAPLACE	12
2.5 RESTRICTIONS D'APPLICATION DES THEOREMES DE LA VALEUR INITIALE ET DE LA VALEUR FINALE	13
2.5.1 EXEMPLE 1 : FONCTION EXPONENTIELLE	13
2.5.2 EXEMPLE 2 : FONCTION COSINUS.....	14
3. FONCTIONS DE TRANSFERT, DIAGRAMMES FONCTIONNELS ET EQUATION D'ETAT	15
3.1 FONCTION DE TRANSFERT.....	15
3.2 DIAGRAMMES FONCTIONNELS	16
3.3 EQUATION D'ETAT	17
3.3.1 ILLUSTRATION SUR UN EXEMPLE SIMPLE	17
3.3.2 FORME GENERALE DE L'EQUATION D'ETAT DES SYSTEMES LINEAIRES	17
3.3.3 LIEN DE L'EQUATION D'ETAT AVEC LE DIAGRAMME FONCTIONNEL.....	18
3.4 ELEMENTS DE BASE DES SYSTEMES CONTINUS LINEAIRES.....	20

3.4.1	EXEMPLE 1 : SYSTEMES DU PREMIER ORDRE.....	20
3.4.2	EXEMPLE 2 : SYSTEMES DU SECOND ORDRE	20
4.	DISCRETISATION DE L'EQUATION D'ETAT CONTINUE.....	22
4.1	TABLEAUX DES TRANSFORMEES EN Z	22
4.2	EXEMPLE D'UTILISATION	23
5.	CONVERSION ENTRE FONCTION DE TRANSFERT CONTINUE ET FONCTION DE TRANSFERT DISCRETE.....	24
5.1	EQUATIONS AUX DIFFERENCES	24
5.2	CALCUL DE LA FONCTION DE TRANSFERT DISCRETE.....	24
5.2.1	BLOQUEUR D'ORDRE ZERO	25
5.2.2	SYSTEMES DU PREMIER ORDRE	25
5.2.3	SYSTEMES DU SECOND ORDRE	28
5.2.4	REGULATEURS P.I.D.....	31
6.	GENERALISATION : EQUATION D'ETAT	32
6.1	PASSAGE DU CONTINU AU DISCRET	32
6.2	UTILISATION D'UN BLOQUEUR D'ORDRE ZERO.....	33
6.3	SIMPLIFICATION (SOUS CONDITIONS).....	33
7.	CHOIX DE LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE	34
7.1	REGLE «PRAGMATIQUE» UTILISEE PAR LES AUTOMATICIENS.....	34
7.2	SPECTRE DE FREQUENCE D'UN SIGNAL ECHANTILLONNE.....	34
7.2.1	THEOREME DE SHANNON	34
7.2.2	AUTRE CARACTERISATION DE L'ECHANTILLONNAGE.....	36

1. INTRODUCTION

1.1 OBJECTIFS DU RAPPORT

L'objectif premier de ce rapport est de rappeler un certain nombre de «techniques d'usage courant» en automatique.

Le second est de permettre aux «informaticiens» du projet ACOTRIS de se familiariser avec ces techniques utilisées par les «automaticiens» en contrôle-commande et plus spécifiquement les différentes représentations utilisées.

1.2 RAPPELS DU CONTEXTE

L'étude mathématique d'un système physique (mécanique, électrique, chimie...) consiste, une fois précisées les hypothèses admises :

- A lui appliquer les lois physiques qui le régissent, notamment les lois de la Mécanique (principe de la dynamique), de l'Electricité (équations de Maxwell) : cela s'appelle «**le mettre en équations**».
- A étudier son comportement en étudiant ses équations. Pour cela et lorsque c'est possible de les résoudre, on «commente» le résultat.

Contrairement à ce qu'on s'imagine parfois, le premier de ces points, la mise en équations, est le plus important. Cette écriture conduit à des équations dont la forme mathématique est fort diverse.

Dans le monde technique et plus particulièrement celui de l'automatique, on a l'habitude de distinguer :

- Les systèmes linéaires, régis par des équations différentielles à coefficients constants,
- Les autres systèmes (ou systèmes non linéaires), régis par des équations différentielles non linéaires, des équations aux dérivées partielles ou tout autre type d'équations fonctionnelles.

Dans les modèles dynamiques, on a coutume de distinguer :

- Les modèles dits «de connaissance». Ils sont élaborés à partir des lois de la physique ou de la chimie. Leur objectif principal est d'expliquer un phénomène par une relation mathématique. En général, ils sont assez complexes et comportent de nombreux paramètres.
- Les modèles «de représentation» ou «de comportement», ou encore «boîte noire». Ce sont des modèles linéaires, dont la validité reste limitée à de petites variations autour du point de fonctionnement. On les appelle aussi fonctions de transfert, ou modèles ARMAX (modèle auto-régressif à moyenne ajustée).
- Les modèles intermédiaires ou «boîte grise». Ils constituent un hybride entre les deux types précédents. On peut les considérer comme des modèles de connaissance simplifiés.

Les représentations utilisées peuvent être continues (ensemble d'équations différentielles) ou discrètes (équations récurrentes).

Dans ce rapport, après un rappel des outils de l'automaticien, nous décrivons une méthode simple pour passer de la représentation continue à la représentation discrète des systèmes dynamiques linéaires puis nous l'appliquons à des organes de commande usuels (systèmes du 1^{er} et du 2nd ordre, PID...).

Cette méthode est valable pour la représentation du processus que celui de sa commande, dans la mesure où les hypothèses de l'automatique sont vérifiées :

- Pour mémoire et dans le cas de l'électricité, pour l'automaticien, les lois de Kirchhoff cessent d'être valides pour un circuit donné, lorsque les phénomènes dont il est le siège varient très rapidement en fonction du temps, autrement dit, lorsque les fréquences en jeu deviennent très élevées.
- A titre d'ordre de grandeur, si λ est la longueur d'onde associée à la fréquence F et c est la vitesse de la lumière ($\lambda = \frac{c}{F}$) :
- Pour un montage électrique dont les dimensions se comptent en centimètres ou décimètres, des phénomènes mettant en jeu des fréquences de 100 Hz ($\lambda = 300$ km) à 1000 Hz ($\lambda = 30$ km) ne mettent pas en cause la validité des équations linéaires de Kirchhoff
- Il en est différemment pour le même montage lorsque les phénomènes mettent en jeu des fréquences de 1 MHz ($\lambda = 3$ m) à 10 MHz ($\lambda = 30$ cm).

2. TRANSFORMEE DE LAPLACE

2.1 DEFINITIONS

La transformée de Laplace unilatérale d'une fonction $f(t)$ est définie par :

$$L\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \text{ où :}$$

$f(t)$ est la fonction du temps définie pour $t > 0$,

$p = \sigma + j\omega$ est la variable complexe,

L est l'opérateur de Laplace,

$F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$.

La transformée de Laplace est biunivoque et pour $t > 0$ on peut définir la transformée inverse

$$f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$$

2.2 PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

2.2.1 Linéarité

La transformée de Laplace est linéaire. En effet, si α_1 et α_2 sont des constantes réelles et si $f_1(t)$ et $f_2(t)$ admettent respectivement pour transformées de Laplace $F_1(p)$ et $F_2(p)$ alors la transformée de Laplace de la combinaison linéaire des ces fonctions est donnée par l'expression suivante :

$$L[\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)] = \alpha_1 F_1(p) + \alpha_2 F_2(p)$$

2.2.2 Dérivation

La transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction $f(t)$ dont les conditions initiales ne sont pas nulles est donnée par l'expression suivante :

$$L\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = p^n F(p) - \sum_{k=1}^n \left[p^{n-k} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} f(t) \right]_{t=0}$$

2.2.3 Intégration

La transformée de Laplace de la primitive d'une fonction $f(t)$ dont les conditions initiales ne sont pas nulles est donnée par l'expression suivante :

$$L\left[\int_{-\infty}^t f(t)dt\right] = \frac{F(p)}{p} + \frac{1}{p} \left[\int_{-\infty}^t f(\sigma)d\sigma\right]_{t=0}$$

2.2.4 Retard

La transformée de Laplace de la fonction $f(t-\tau)$ où τ est un retard et $F(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ est donnée par l'expression suivante :

$$L[f(t-\tau)] = e^{-p\tau} F(p)$$

En pratique, ce théorème s'applique pour les systèmes dont la réponse n'est pas instantanée et se manifeste après un retard τ :

Soit g , avec $g(t)=0$, si $t < 0$

Soit la fonction f , la fonction retardée de τ définie comme suit :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \forall t < \tau \\ g(t-\tau) & t \geq \tau \end{cases}$$

alors

$$F(p) = L[f(t)] = e^{-p\tau} G(p)$$

2.2.5 Modification d'échelle

Pour une raison quelconque, on peut être amené à effectuer un changement d'échelle dans le domaine du temps. Le théorème de modification d'échelle permet alors de répondre à la question «comment un tel changement se traduit-il dans le plan complexe» :

$$L\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha F(\alpha p), \text{ où}$$

α est une constante réelle,

$F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$.

2.2.6 Translation dans le domaine complexe

Une translation dans le domaine complexe se traduit dans le domaine du temps par la relation suivante :

$$L[e^{-\alpha t} f(t)] = F(p + \alpha), \text{ où}$$

α est une constante réelle,

$F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$.

2.2.7 Convolution

En supposant que les transformées de Laplace des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont respectivement $F(p)$ et $G(p)$, la transformée Laplace de la convolution intégrale $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ est

$$F(p)G(p) = L \left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \right]$$

2.2.8 Théorème de la valeur initiale

Il permet de calculer la valeur de la fonction $f(t)$ à l'instant initial à partir de l'expression de $F(p)$ à l'instant $t=0$. L'énoncé du théorème est résumé par les relations suivantes :

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p)$$

2.2.9 Théorème de la valeur finale

Il permet de calculer la valeur de la fonction $f(t)$ à l'infini à partir de l'expression de $F(p)$ lorsque l'instant $t \rightarrow \infty$. Il n'est applicable que lorsque tous les pôles de $pF(p)$ sont à partie réelle strictement négative. L'énoncé du théorème est résumé par les relations suivantes :

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p)$$

2.3 TRANSFORMEE DE LAPLACE DES FONCTIONS USUELLES

En utilisant la définition de la transformée de Laplace on peut générer une table succincte des transformées de Laplace des fonctions usuelles : impulsion unitaire, échelon unitaire, rampe unitaire, exponentielle ... (voir Tableau 1.1).

2.4 TABLE SUCCINCTE DES TRANSFORMEES DE LAPLACE

Original : $f(t)$	Image: $F(p)$
$\delta(t)$ impulsion unitaire	1
$1 = u(t)$ échelon unitaire	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
$t e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^2}$
$\frac{t^n}{n!} e^{at}$	$\frac{1}{(p-a)^{n+1}}$
$(1 + at) e^{at}$	$\frac{p}{(p-a)^2}$
$\frac{e^{\beta t} - e^{at}}{\beta - a}$	$\frac{1}{(p-a)(p-\beta)}$
$\frac{\beta e^{\beta t} - a e^{at}}{\beta - a}$	$\frac{p}{(p-a)(p-\beta)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin (\omega t + \varphi)$	$\frac{p \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{p^2 + \omega^2}$
$\cos (\omega t + \varphi)$	$\frac{p \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{p^2 + \omega^2}$
$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$
$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$
$A e^{-at} \cos (\omega t + \varphi)$ avec $\begin{cases} A = \frac{1}{\omega} \sqrt{\alpha^2 \omega^2 + (\beta - a \alpha)^2} \\ \varphi = -\arctg \frac{\beta - a \alpha}{\alpha \omega} \end{cases}$	$\frac{\alpha p + \beta}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$

Tableau 1.1 : Table succincte des transformées de Laplace

2.5 RESTRICTIONS D'APPLICATION DES THEOREMES DE LA VALEUR INITIALE ET DE LA VALEUR FINALE

2.5.1 Exemple 1 : fonction exponentielle

Considérons le cas de la fonction exponentielle $e^{\pm\alpha t}$. Une telle fonction et sa transformée de Laplace sont données par les relations suivantes :

$$f(t) = e^{\pm\alpha t} \quad \alpha > 0$$

$$F(p) = \frac{1}{p \pm \alpha}$$

2.5.1.1 Cas $e^{+\alpha t}$

Par le théorème de la valeur initiale on obtient :

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{p + \alpha} = 1$$

Par le théorème de la valeur finale on obtient :

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{p + \alpha} = 0$$

Les deux résultats sont corrects car les hypothèses des théorèmes sont satisfaites.

2.5.1.2 Cas $e^{-\alpha t}$

Par le théorème de la valeur initiale on obtient :

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p}{p - \alpha} = 1$$

Par le théorème de la valeur finale on obtient :

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p}{p - \alpha} = 0$$

Ce résultat n'a aucun sens car la fonction $pF(p)$ possède un pôle à partie réelle positive.

2.5.2 Exemple 2 : fonction cosinus

Considérons le cas de la fonction $\cos(t)$. Une telle fonction et sa transformée de Laplace sont données par les relations suivantes :

$$f(t) = \cos(t)u_{-1}(t) \quad \text{où} \quad u_{-1}(t) = \begin{cases} 1 & \forall t \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 1}$$

2.5.2.1 Utilisation du théorème de la valeur initiale

Le calcul donne :

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^2}{p^2 + 1} = 1$$

La valeur 1 obtenue coïncide avec celle obtenue en évaluant $\cos(t)$ à $t=0$.

2.5.2.2 Utilisation non licite du théorème de la valeur finale

Le calcul de la valeur finale par le théorème de même nom donne :

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2}{p^2 + 1} = 0$$

Toutefois, le théorème ne s'applique pas car la fonction $pF(p)$ possède deux pôles sur l'axe imaginaire. Le résultat ci-dessus n'est donc pas valable.

3. FONCTIONS DE TRANSFERT, DIAGRAMMES FONCTIONNELS ET EQUATION D'ETAT

3.1 FONCTION DE TRANSFERT

Considérons l'équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{d y(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t)$$

La transformée de Laplace de la dérivée n^{ème} de f(t) est

$$L\left(\frac{d^n}{dt^n}\right) = p^n F(p) - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0^+) \quad \text{où} \quad f^{(k)} \equiv \frac{d^k}{dt^k} f(t)$$

Si les conditions initiales sur y(t) et u(t) à t=0 sont

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0; \quad u(0) = u'(0) = \dots = u^{(m-1)}(0) = 0$$

alors, en prenant la transformée de Laplace de chacun des termes, on obtient (voir Figure 2.1) :

$$G(p) = \frac{L\{\text{sortie}\}}{L\{\text{entrée}\}} = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0}$$

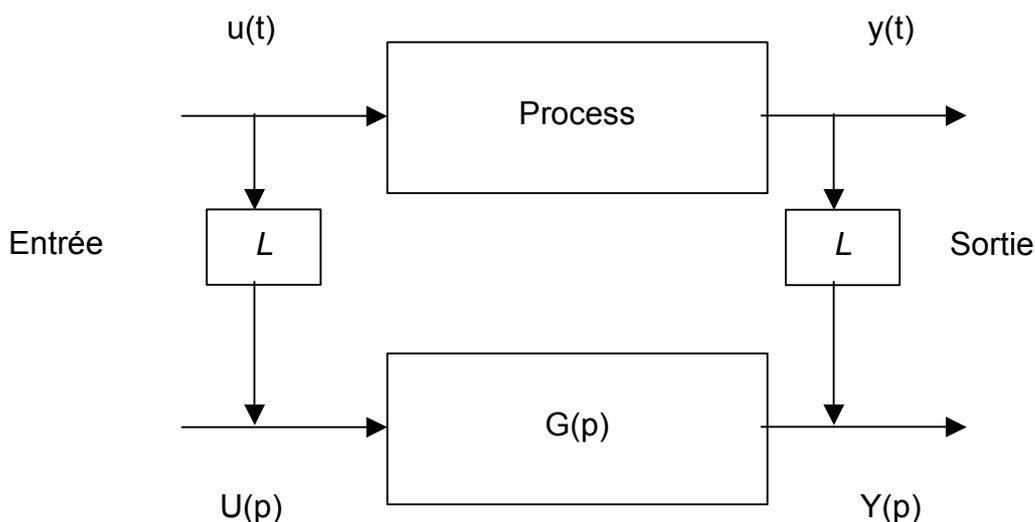


Figure 2.1 : Fonction de transfert

3.2 DIAGRAMMES FONCTIONNELS

Considérons les hypothèses suivantes :

- Les systèmes sont **unidirectionnels**
- Les systèmes sont **linéaires**.

L'utilisation des diagrammes fonctionnels permet de représenter graphiquement une fonction de transfert ou une combinaison de fonctions de transfert (voir Figures 2.2 et 2.3).

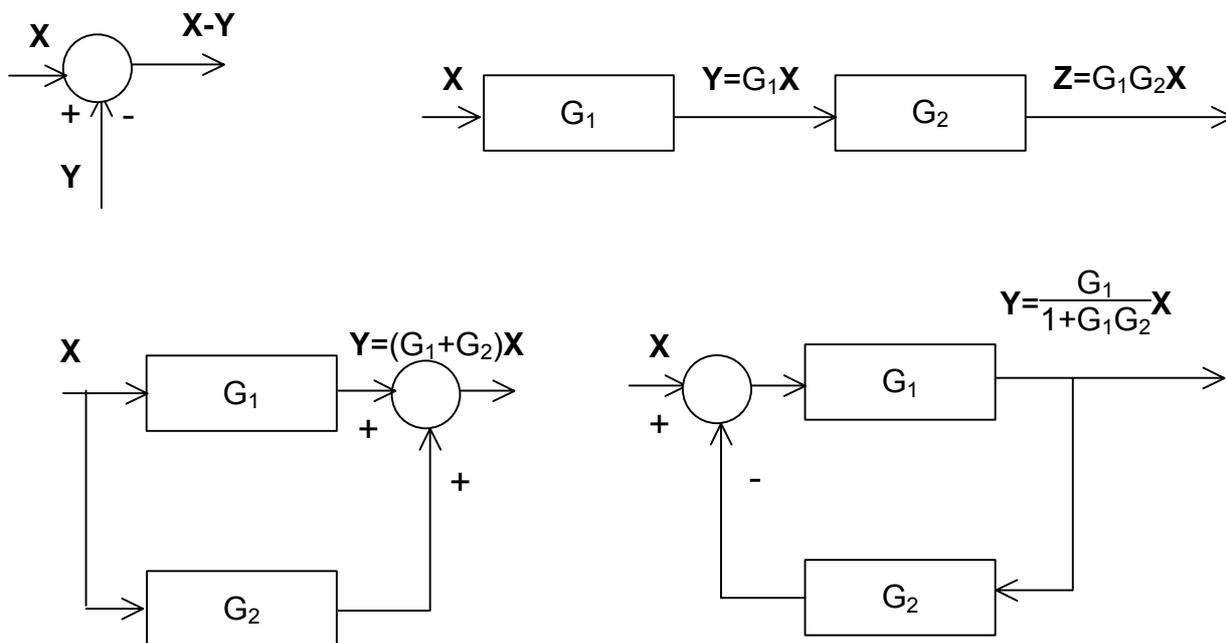


Figure 2.2 : Diagrammes fonctionnels de systèmes à une entrée-sortie

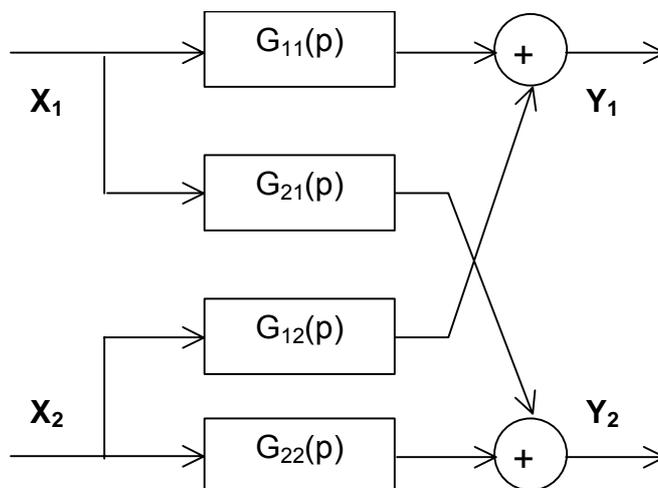


Figure 2.3 : Diagramme fonctionnel de systèmes à plusieurs entrées-sorties

3.3 EQUATION D'ETAT

3.3.1 Illustration sur un exemple simple

Pour illustrer notre propos, nous allons recourir à un exemple de circuit électrique (voir Figure 2.4).

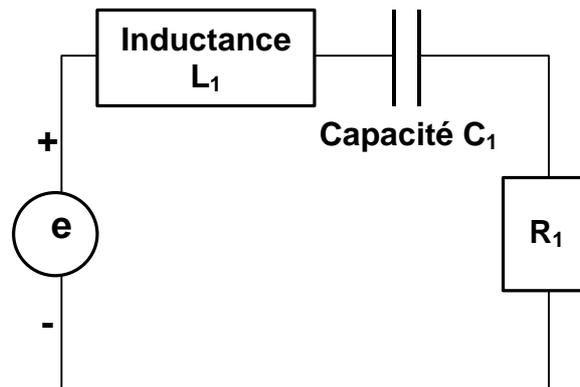


Figure 2.4 : Exemple de circuit électrique

Notons e la tension d'excitation, x_1 la tension aux bornes de la capacité C_1 et x_2 le courant dans l'inductance L_1 . L'état du circuit est caractérisé à tout instant par la tension x_1 et le courant x_2 qu'on appelle ses variables d'état. Les équations du circuit s'écrivent :

$$e = x_1 + R x_2 + L \frac{d x_2}{d t}$$

$$C \frac{d x_1}{d t} = x_2$$

$$y = R x_2$$

Soit sous forme matricielle :

$$\frac{dX}{d t} = A \cdot X + B \cdot U$$

$$Y = C \cdot X$$

avec :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix}, \quad C = [0 \quad R]$$

$$A_{11} = 0, \quad A_{12} = 1/C, \quad A_{21} = -1/L, \quad A_{22} = -R/L$$

3.3.2 Forme générale de l'équation d'état des systèmes linéaires

Les équations du circuit électrique RLC sont de la forme plus générale suivante :

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X(t) + B(t)U(t)$$

$$Y(t) = C(t)X(t) + \sum \beta_k U^k$$

où $X(t)$ est le vecteur colonne des variables d'état de dimension n

$U(t)$ est le vecteur colonne des variables d'entrée de dimension m

Y est le vecteur colonne des variables de sortie de dimension p ,

$A(t)$ est la matrice d'état, $B(t)$ est la matrice d'entrée et $C(t)$ est la matrice de sortie, de dimensions adéquates.

$\beta_0 \dots \beta_k$ sont des coefficients constants, qui sont nuls dans le cas (habituel) où le dénominateur de la fonction de transfert a un degré supérieur au numérateur.

L'écriture des équations d'état sous la forme générale n'est pas unique. D'où l'importance de la forme canonique pour une équation d'état.

3.3.3 Lien de l'équation d'état avec le diagramme fonctionnel

Dans l'exemple ci-après et afin d'illustrer le propos précédent, nous allons donner deux diagrammes fonctionnels à partir de deux écritures des équations d'état obtenues à partir d'une fonction de transfert $G(p)$.

Considérons la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{p}{(p+2) \cdot (p+3)} = -\frac{2}{p+2} + \frac{3}{p+3}$$

3.3.3.1 Première représentation

Equation d'état :

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \{U\}$$

$$\{Y\} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

Diagramme fonctionnel :

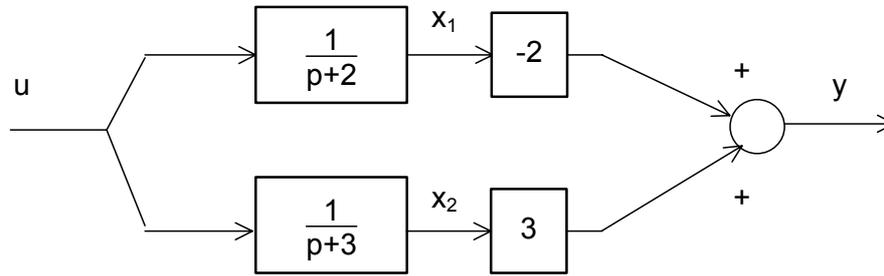


Figure 2.5 : Diagramme fonctionnel 1

3.3.3.2 Seconde représentation

Autre écriture des équations :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -2x_1 + u \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2x_1 - 3x_2 + u = -3x_2 + \frac{dx_1}{dt} \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

Equation d'état qui en résulte :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \{U\} \\ \{Y\} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Diagramme fonctionnel (en cascade) :

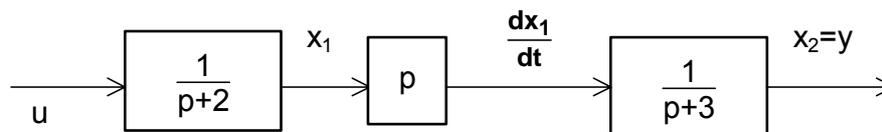


Figure 2.5 : Diagramme fonctionnel 2 (en cascade)

3.4 ELEMENTS DE BASE DES SYSTEMES CONTINUS LINEAIRES

3.4.1 Exemple 1 : Systèmes du premier ordre

Equation :

$$a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = bu(t)$$

Dans le cas où le coefficient $a_0=0$, la sortie $y(t)$ est égale à l'intégrale de l'entrée. Le système devient alors un intégrateur pur. Si $a_0 \neq 0$, alors cette équation peut se mettre sous la forme :

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t)$$

La fonction de transfert d'un tel système est égale à :

$$G(p) = \frac{K}{Tp+1}, \text{ où}$$

T est la constante du temps du système [secondes]

$K = \frac{b}{a_1}$ est le gain statique du système (sans dimension).

3.4.2 Exemple 2 : Systèmes du second ordre

Equation :

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = bu(t)$$

Si $a_0 \neq 0$, alors cette équation peut se mettre sous la forme :

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t), \text{ où}$$

$\omega_n = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$ est la fréquence propre non amortie, ou naturelle d'oscillation du système [radians par seconde]

$\zeta = \frac{a_1}{2} \sqrt{\frac{1}{a_0 a_2}}$ est le facteur d'amortissement ou amortissement réduit (sans dimension)

$K = \frac{b}{a_2}$ est le gain statique du système (sans dimension).

La fonction de transfert d'un tel système est égale à :

$$G(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1}$$

Et l'équation caractéristique est :

$$p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2 = 0$$

4. DISCRETISATION DE L'EQUATION D'ETAT CONTINUE

Nous allons considérer le cas des systèmes linéaires stationnaires. La matrice fondamentale prend une forme remarquable et l'équation d'état discrète peut s'explicitier plus simplement.

4.1 TABLEAUX DES TRANSFORMEES EN Z

D'autre part, l'utilisation de la transformée de Laplace ou de la transformée en z peut faciliter ce travail (voir Tableau 3.1 et Tableau 3.2 pour la transformée en z de G(p).

$G(p)$	$g(t)$	$G(z)$	$G(z, m)$
e^{-st}	$\delta(t - kT)$	z^{-k}	z^{m-1-k}
$\frac{1}{p}$	$\delta(t)$	1 ou z^{-0}	0
$\frac{1}{p}$	$u(t)$	$\frac{z}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$
$\frac{1}{p^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	$\frac{mT}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{p^3}$	$\frac{1}{2!} t^2$	$\frac{T^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$	$\frac{T^2}{2} \left[\frac{m^2}{z-1} + \frac{2m+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{(z-1)^3} \right]$
$\frac{1}{p - \frac{1}{T} \ln a}$	$a \frac{t}{T}$	$z/(z-a)$	$a^m/(z-a)$
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$	$\frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$t e^{-at}$	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$	$T e^{-amT} \left[\frac{e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2} + m(z-e^{-aT}) \right]$
$\frac{1}{(p+a)^3}$	$\frac{t^2}{2} e^{-at}$	$\frac{T^2 e^{-aT} z}{2(z-e^{-aT})^2} + \frac{T^2 e^{-2aT} z}{(z-e^{-aT})^3}$	$\frac{T^2 e^{-amT}}{2} \left[\frac{m^2}{z-e^{-aT}} + \frac{(2m+1)e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2} + \frac{2e^{-2aT}}{(z-e^{-aT})^3} \right]$
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-at}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$	$\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-amT}}{z-e^{-aT}}$
$\frac{a}{p^2(p+a)}$	$t - \frac{1 - e^{-at}}{a}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2} - \frac{(1 - e^{-aT})z}{a(z-1)(z-e^{-aT})}$	$\frac{T}{(z-1)^2} + \frac{mT - 1/a}{z-1} + \frac{e^{-amT}}{a(z-e^{-aT})}$
$\frac{a}{p^3(p+a)}$	$\frac{1}{2!} \left(t^2 - \frac{2}{a}t + \frac{2}{a^2} - \frac{2}{a^2}e^{-at} \right)$	$\frac{T^2 z}{(z-1)^3} + \frac{(aT-2)Tz}{2a(z-1)^2} + \frac{z}{a^2(z-1)} - \frac{z}{a^2(z-e^{-aT})}$	$\frac{T^2}{(z-1)^3} + T^2 \frac{(m+1/2 - T/a)}{(z-1)^2} + \frac{T^2 m^2}{2} - \frac{Tm}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{e^{-amT}}{a^2(z-e^{-aT})}$

Tableau 3.1 : Transformée en z et en z modifiée

$G(p)$	$g(t)$	$G(z)$	$G(z, m)$
$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$\sin \omega_0 t$	$\frac{z \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	$\frac{z \sin m\omega_0 T + \sin(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$	$\cos \omega_0 t$	$\frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	$\frac{z \cos m\omega_0 T - \cos(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
$\frac{\omega_0}{p^2 - \omega_0^2}$	$\text{sh } \omega_0 t$	$\frac{z \text{sh } \omega_0 T}{z^2 - 2z \text{ch } \omega_0 T + 1}$	$\frac{z \text{sh } m\omega_0 T + \text{sh}(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \text{ch } \omega_0 T + 1}$
$\frac{p}{p^2 - \omega_0^2}$	$\text{ch } \omega_0 t$	$\frac{z(z - \text{ch } \omega_0 T)}{z^2 - 2z \text{ch } \omega_0 T + 1}$	$\frac{z \text{ch } m\omega_0 T - \text{ch}(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \text{ch } \omega_0 T + 1}$
$\frac{\omega_0^2}{p(p^2 - \omega_0^2)}$	$\text{ch } \omega_0 t - 1$	$\frac{z(z - \text{ch } \omega_0 T)}{z^2 - 2z \text{ch } \omega_0 T + 1} - \frac{z}{z-1}$	$\frac{z \text{ch } m\omega_0 T - \text{ch}(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \text{ch } \omega_0 T + 1} - \frac{1}{z-1}$
$\frac{\omega_0^2}{p(p^2 + \omega_0^2)}$	$1 - \cos \omega_0 t$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z(z - \cos \omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$	$\frac{1}{z-1} - \frac{z \cos m\omega_0 T - \cos(1-m)\omega_0 T}{z^2 - 2z \cos \omega_0 T + 1}$
$\frac{a^2}{p(p+a)^2}$	$1 - (1+at)e^{-at}$	$\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{aT e^{-aT} z}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{1}{z-1} - \left[\frac{1+aT}{z-e^{-aT}} + \frac{aT e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2} \right] e^{-amT}$
$\frac{a^2(p+b)}{p(p+a)^2}$	$b - b e^{-at} + a(a-b)t e^{-at}$	$\frac{bz}{z-1} - \frac{bz}{z-e^{-aT}} + \frac{a(a-b)T e^{-aT} z}{(z-e^{-aT})^2}$	$\frac{b}{z-1} + \left[\frac{amT(a-b) - b}{z-e^{-aT}} + \frac{aT(a-b)e^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2} \right] e^{-amT}$
$\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-at} \sin \omega_0 t$	$\frac{z e^{-aT} \sin \omega_0 T}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$	$\frac{[z \sin m\omega_0 T + e^{-aT} \sin(1-m)\omega_0 T] e^{-amT}}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-at} \cos \omega_0 t$	$\frac{z^2 - z e^{-aT} \cos \omega_0 T}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$	$\frac{[z \cos m\omega_0 T - e^{-aT} \cos(1-m)\omega_0 T] e^{-amT}}{z^2 - 2z e^{-aT} \cos \omega_0 T + e^{-2aT}}$

Tableau 3.2 : Transformée en z et en z modifiée (suite)

4.2 EXEMPLE D'UTILISATION

Afin d'illustrer l'utilisation de la transformée en z pour calculer la forme échantillonnée d'une fonction de transfert $F(p)$, nous allons recourir à un exemple et calculer $F(z)$ sous la forme d'une série de puissances croissantes de z^{-1} où les coefficients sont les valeurs de la fonction $f(t)$ aux instants d'échantillonnage.

Si nous disposons de $F(z)$ sous forme condensée d'un rapport de polynômes (**à compléter**)

5. CONVERSION ENTRE FONCTION DE TRANSFERT CONTINUE ET FONCTION DE TRANSFERT DISCRETE

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons exposer une méthode systématique permettant d'obtenir la fonction de transfert discrète d'une fonction de transfert continue, par utilisation de l'opérateur retard $e^{-T_p} = q^{-1}$ (*plutôt que d'avance, lorsque la transformée en z est utilisée*) et d'un bloqueur d'ordre zéro (pour un bloqueur d'ordre 1 ou supérieur l'utilisation serait possible, si cette dernière pouvait présenter un quelconque avantage).

5.1 EQUATIONS AUX DIFFERENCES

Considérons l'équation aux différences suivante :

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \dots + a_p y_{n-p} = b_0 u_n + b_1 u_{n-1} + \dots + b_m u_{n-m}$$

L'opérateur retard, noté q^{-1} , est défini par :

$$q^{-1} y_n = y_{n-1}, \quad q^{-2} y_n = y_{n-2}, \quad \dots, \quad q^{-k} y_n = y_{n-k}$$

On exprime la fonction de transfert du système discret en fonction de q^{-1} :

$$H(q^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_m q^{-m}}{a_0 + a_1 q^{-1} + \dots + a_p q^{-p}}$$

5.2 CALCUL DE LA FONCTION DE TRANSFERT DISCRETE

La fonction de transfert discrète (ou l'équation aux différences) d'un système continu échantillonné peut se calculer à partir de sa fonction de transfert continue.

La façon la plus élémentaire pour transformer un signal échantillonné en un signal continu consiste à garder la dernière valeur discrète pendant toute la période d'échantillonnage, *rôle dévolu au bloqueur d'ordre 0* (voir Figure 4.1).

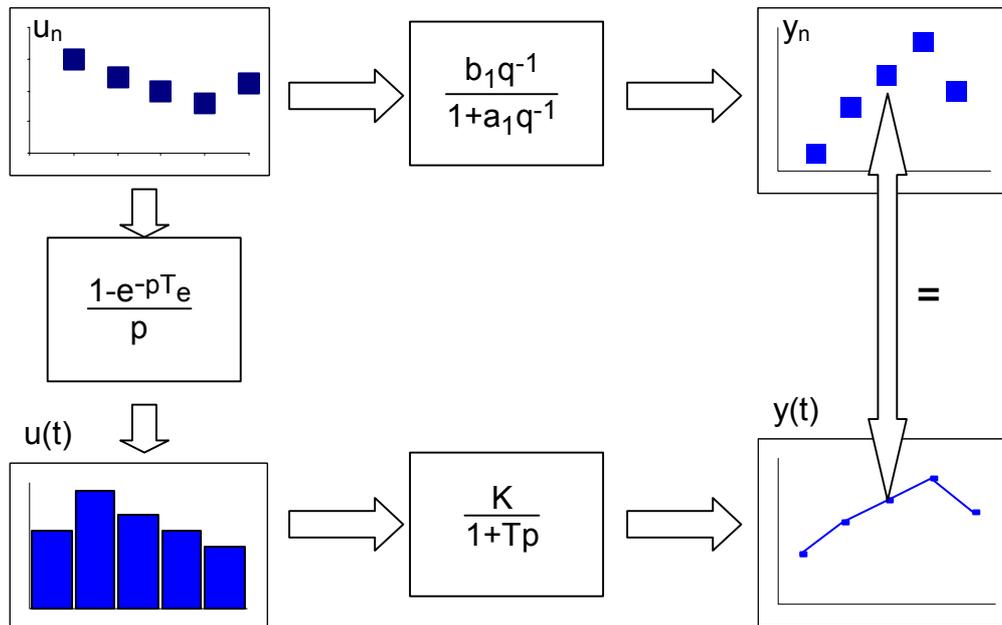


Figure 4.1 : Calcul de la fonction de transfert discrète

5.2.1 Bloqueur d'ordre zéro

La fonction de transfert continue $G(p)$ d'un bloqueur d'ordre zéro peut se calculer en l'écrivant comme une différence entre deux échelons décalés dans le temps :

$$G(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-pT_e}}{p} = \frac{1 - e^{-pT_e}}{p}, \text{ où } T_e \text{ est la période d'échantillonnage.}$$

5.2.2 Systèmes du premier ordre

Equation continue et fonction de transfert associée :

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t); \quad G(p) = \frac{K}{Tp+1}$$

Posons $a_1 = -e^{-\frac{T_e}{T}}$ et $b_1 = K(1 - e^{-\frac{T_e}{T}})$. La fonction de transfert discrète avec un bloqueur d'ordre zéro s'écrit :

$$y_n + a_1 y_{n-1} = b_1 u_{n-1}; \quad H(q^{-1}) = \frac{b_1 q^{-1}}{1 + a_1 q^{-1}}$$

```
% Le fichier de commandes premier.m
clear all
% Conditions initiales
T=10;
T_e=0.1;
t_0=30;
K=1;
T_sim=t_0+60;
nmax=T_sim/T_e;
n_q=t_0/T_e;
u_n=0;
u_nn=100;
% Passage du continu au discret
b_1=K*(1-exp(-T_e/T));
a_1=-exp(-T_e/T)
t=[0:T_e:T_sim];
y(1)=0;
u(1)=0;
y_nml=0;
y_n=0;
u_n=0;
u_nml=0;
% Simulation
for n=2:nmax+1
    y_nml=y_n;u_nml=u_n;
    if n >= n_q
        u_n=u_nn;
    end;
    u(n)=u_n;
    y_n=-a_1*y_nml+b_1*u_nml;
    y(n)=y_n;
end
% Représentation graphique (voir Figure 4.2)
plot(t,u,'-',t,y,'-')
xlabel('Temps (sec)');ylabel('Entrée - Sortie');axis([0 T_sim -10 120])
```

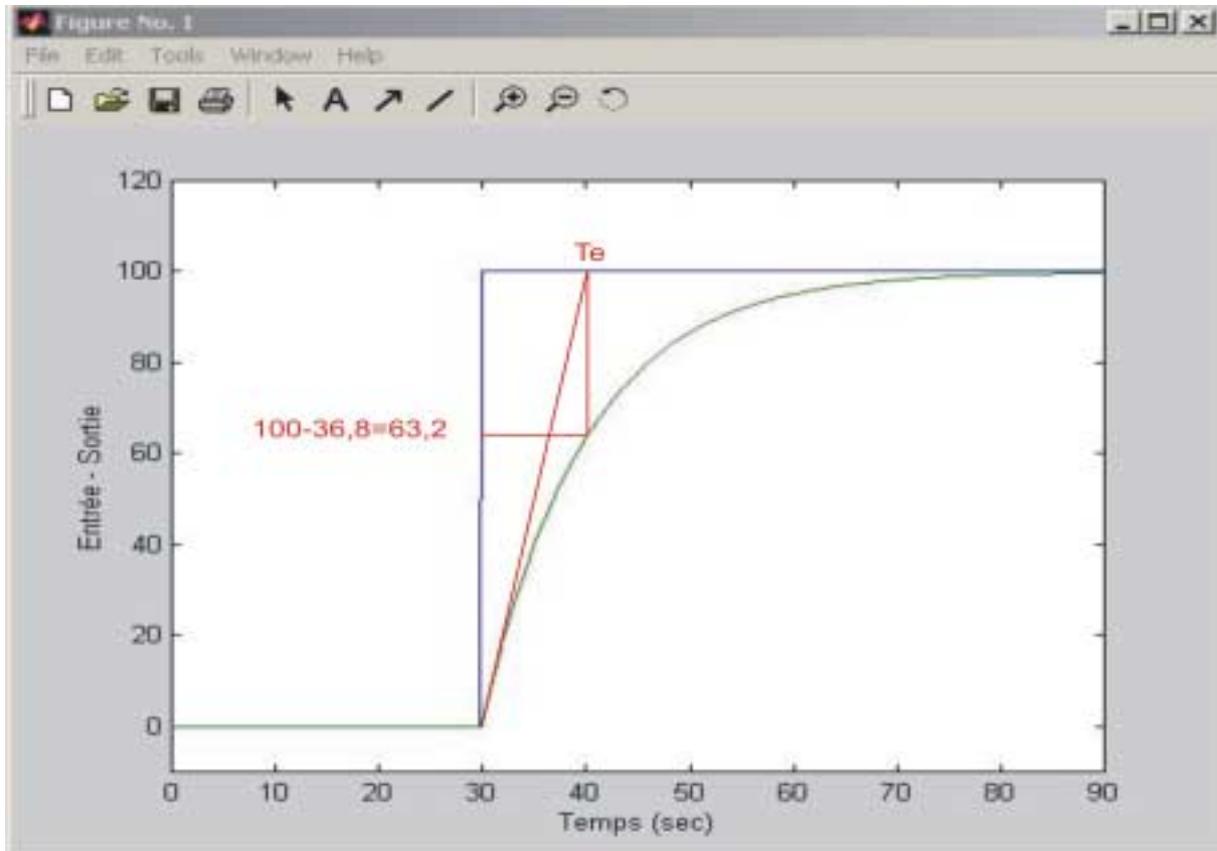


Figure 4.2 : Réponse à un échelon d'un système du premier ordre

Remarques :

- La constante de temps (*characteristic time*) T_e est le temps au bout duquel l'amplitude du régime libre a été réduit dans le rapport $\frac{1}{e} \approx 0,368$.
- Théoriquement, le régime libre qui est ici exponentiel ne disparaît qu'au bout d'un temps infini.
- En pratique, on est cependant amené à chiffrer la rapidité du régime transitoire en considérant le temps de réponse :

On définit souvent le temps de réponse à 5% (*response time*), comme le temps au bout duquel le système a atteint son régime permanent à 5% : $t_{5\%} = \frac{5}{100} \approx \frac{1}{e^3} \approx 3T_e$.

D'autres définissent le temps de réponse à 2% (*indication time*). On a alors : $t_{2\%} = \frac{2}{100} \approx \frac{1}{e^4} \approx 4T_e$.

- C'est également ce temps de réponse (à : $t_{5\%} \approx 3T_e$ ou $t_{2\%} \approx 4T_e$) dont il faut tenir compte si on veut contrôler la précision des calculs lors de la discrétisation (atteinte du régime permanent à 5% ou à 2%).

5.2.3 Systèmes du second ordre

Equation continue et fonction de transfert associée :

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t); \quad G(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1}$$

Fonction de transfert discrète avec un bloqueur d'ordre zéro :

$$Y_n + a_1 Y_{n-1} + a_2 Y_{n-2} = b_1 U_{n-1} + b_2 U_{n-2} \quad H(q^{-1}) = \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2}}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}}$$

- Si $\zeta=1$

Il y a deux pôles égaux et la réponse est apériodique : nous sommes en présence de deux systèmes du premier ordre (pour la discrétisation se reporter au § 5.2.2)

$$G(p) = \frac{K}{(1+Tp)^2} = \frac{K}{1+Tp} \cdot \frac{1}{1+Tp}$$

- Si $\zeta > 1$

Il y a deux pôles réels distincts et la réponse est apériodique : nous sommes en présence de deux systèmes du premier ordre (pour la discrétisation se reporter au § 5.2.2)

$$G(p) = \frac{K}{(1+T_1 p) \cdot (1+T_2 p)} = \frac{K}{1+T_1 p} \cdot \frac{1}{1+T_2 p}$$

- Si $0 < \zeta < 1$

Il y a deux pôles complexes conjugués et la réponse est oscillatoire amortie :

$$b_1 = K \left(1 - e^{-\frac{\zeta T_e}{T}} \left(\cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} T_e + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{T}{T} \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} T_e \right) \right)$$

$$b_2 = K e^{-\frac{\zeta T_e}{T}} \left(e^{-\frac{\zeta T_e}{T}} - \cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} T_e + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{T}{T} \sin \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} T_e \right)$$

$$a_1 = -2 e^{-\frac{2\zeta T_e}{T}} \cos \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} T_e$$

$$a_2 = e^{-\frac{2\zeta T_e}{T}}$$

```
% Le fichier de commandes second.m
clear all
% Conditions initiales
T=5;
zeta=0.25;
T_e=0.1;
K=1;
t_0=30;
T_sim=t_0+120;
nmax=T_sim/T_e;
n_q=t_0/T_e;
u_n=0;
u_nn=100;
% Passage du continu au discret
phi=(sqrt(1-zeta^2)/T)*T_e
% a=(sqrt(1-zeta^2)/T);
b_1=K*(1-exp(-(zeta*T_e)/T)*(cos(phi)+(zeta/T)*sin(phi)))
b_2=K*exp(-(zeta*T_e)/T)*(exp(-(zeta*T_e)/T)-cos(phi)+(zeta/T)*sin(phi))
a_1=-2*exp(-(zeta*T_e)/T)*cos(phi)
a_2=exp(-(2*zeta*T_e)/T)
t=[0:T_e:T_sim];
y(1)=0;
y(2)=0;
u(1)=0;
u(2)=0;
y_nm2=0;
y_nml=0;
y_n=0;
u_nm2=0;
u_nml=0;
% Simulation
for n=3:nmax+1
    if n >= n_q u_n=u_nn;
    end
    y_nm2=y_nml;
    y_nml=y_n;
    u_nm2=u_nml;
    u_nml=u(n-1);
end
```

```

u(n)=u_n;
y_n=-a_1*y_nm1-a_2*y_nm2+b_1*u_nm1+b_2*u_nm2;
y(n)=y_n;
end
% Représentation graphique (voir Figure 4.3)
plot(t,u,'-',t,y,'-')
xlabel('Temps (sec)');ylabel('Entrée - Sortie');axis([0 T_sim 0 150])

```

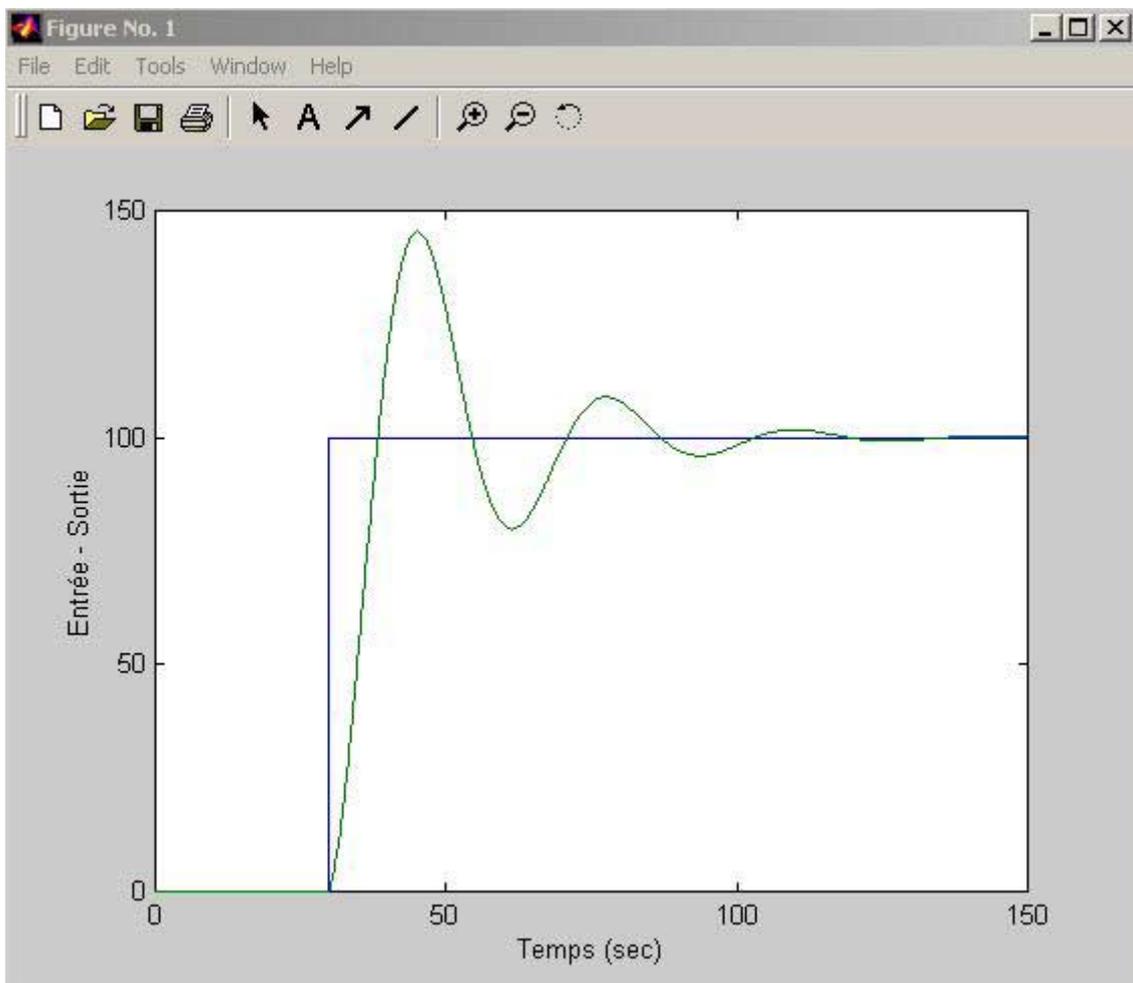


Figure 4.3 : Réponse à un échelon d'un système du second ordre

Remarques :

- La constante de temps (*characteristic time*) T_e est le temps au bout duquel l'amplitude du régime libre a été réduit dans le rapport $\frac{1}{e} \approx 0,368$.

- Théoriquement, le régime libre qui est ici exponentiel ne disparaît qu'au bout d'un temps infini.
- En pratique, on est cependant amené à chiffrer la rapidité du régime transitoire en considérant le temps de réponse :
 - On définit souvent le temps de réponse à 5% (*response time*), comme le temps au bout duquel le système a atteint son régime permanent à 5% : $t_{5\%} = \frac{5}{100} \approx \frac{1}{e^3} \approx 3T_e$.
 - D'autres définissent le temps de réponse à 2% (*indication time*). On a alors : $t_{2\%} = \frac{2}{100} \approx \frac{1}{e^4} \approx 4T_e$.
- C'est également ce temps de réponse (à : $t_{5\%} \approx 3T_e$ ou $t_{2\%} \approx 4T_e$) dont il faut tenir compte si on veut contrôler la précision des calculs lors de la discrétisation (atteinte du régime permanent à 5% ou à 2%).

5.2.4 Régulateurs P.I.D.

Equation de base

L'équation de base du P.I.D. (action Proportionnelle Intégrale Dérivée) est :

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{B} \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right), \text{ où :}$$

$y(t)$ est la position de l'organe de réglage

y_0 est la position moyenne de l'organe (ou consigne)

$e(t) = y_0 - y(t)$ est l'entrée du régulateur P.I.D.

B est la « bande proportionnelle » (ou gain) du régulateur P.I.D.

T_i est la constante de temps d'intégration et T_d est la constante de temps de dérivation.

Passage du continu au discret

Pour obtenir une version discrète de cette équation, il est possible, lorsque la période d'échantillonnage T_e est faible devant les autres constantes de temps, de remplacer :

$$\frac{de}{dt} \cong \frac{e(t) - e(t - T_e)}{T_e} \quad \text{et} \quad \int_0^t e(\tau) d\tau \cong \sum_{i=0}^{n-1} e_i$$

Donc, on a le P.I.D. numérique discret :

$$u_n = u_0 + K_c \left(e_n + \frac{T_e}{T_i} s_n + \frac{T_d}{T_e} (e_n - e_{n-1}) \right)$$

$$s_n = s_{n-1} + e_n$$

6. GENERALISATION : EQUATION D'ETAT

Considérons le modèle d'état continu suivant :

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X(t) + B(t)U(t)$$

$$Y(t) = C(t)X(t)$$

où

$X(t)$ est le vecteur d'état de dimension n

$U(t)$ est le vecteur d'entrée de dimension m

Y est le vecteur de sortie (vecteur des mesures) de dimension p ,

$A(t)$ est la matrice d'état, $B(t)$ est la matrice d'entrée et $C(t)$ est la matrice de sortie (de mesure) de dimensions adéquates.

Posons $A=A(t)$, $B=B(t)$, $C=C(t)$.

La solution générale $X=X(t, t_0, X_0, U)$ de l'équation continue est

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B U(\tau) d\tau$$

6.1 PASSAGE DU CONTINU AU DISCRET

On considère l'instant initial $t_0=nT_e$ et final $t=(n+1)T_e$, et en notant l'état échantillonné à la $n^{\text{ième}}$ période, $X_n=X(nT_e)$, on obtient l'équation :

$$X_{n+1} = e^{AT_e} X_n + \int_{nT_e}^{(n+1)T_e} e^{A[(n+1)T_e-\tau]} B U(\tau) d\tau$$

$U(\tau)$ étant supposée constante, égale à U_n , dans l'intervalle $[nT_e, (n+1)T_e]$ on aboutit à :

$$X_{n+1} = e^{AT_e} X_n + \left[\int_0^{T_e} e^{A[T_e-\tau]} d\tau \right] \cdot B U_n$$

6.2 UTILISATION D'UN BLOQUEUR D'ORDRE ZERO

On peut choisir pour la représentation discrète un vecteur d'état X_n qui sera défini par celui de la représentation continue aux instants d'échantillonnage $t=nT_e$ (principe du bloqueur d'ordre zéro) :

$$X_{n+1} = A_d X_n + B_d U_n, \quad \text{avec} \quad A_d = e^{AT_e}$$

$$Y_n = C X_n \quad B_d = \int_0^{T_e} [e^{A[T_e-\tau]}] \cdot B$$

6.3 SIMPLIFICATION (SOUS CONDITIONS)

Par définition, l'exponentielle de matrice e^{At} s'écrit :

$$e^{At} = 1 + At + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$$

et comme

$$A \int_0^{T_e} e^{A\tau} d\tau = A \left[I \int_0^{T_e} d\tau + A \int_0^{T_e} \tau d\tau + \dots \right]$$

On obtient

$$A \int_0^{T_e} e^{A\tau} d\tau = e^{AT_e} - I$$

Si la matrice A est régulière ($\det A \neq 0$), on peut écrire :

$$B_d \equiv \int_0^{T_e} [e^{A[T_e-\tau]}] \cdot B = A^{-1} \cdot (e^{AT_e} - I) \cdot B$$

Si t est petit, on peut écrire (développement au 1^{er} ordre) :

$$e^{At} \approx I + At$$

La représentation discrète de l'équation d'état, avec bloqueur d'ordre 0, pour t petit devient :

$$X_{n+1} = A_d X_n + B_d U_n, \quad \text{avec} \quad A_d \approx I + AT_e$$

$$Y_n = C X_n \quad B_d \approx BT_e$$

7. CHOIX DE LA PERIODE D'ECHANTILLONNAGE

7.1 REGLE «PRAGMATIQUE» UTILISEE PAR LES AUTOMATICIENS

En contrôle-commande, il faut que la période d'échantillonnage T_e soit «petite» devant T_r , le temps de réponse du procédé en BF. Pour quantifier le terme «petite», c'est la règle suivante qui est appliquée pour choisir T_e :

$$10^{-2} * T_r < T_e < 10^{-1} * T_r$$

Cette règle n'est valable que pour «contrôler» ou «commander» un procédé continu en BF, toujours dans les conditions définies chapitre 1.2.

La borne maximale se justifie par la discussion suivante relative au spectre de fréquence d'un signal échantillonné.

7.2 SPECTRE DE FREQUENCE D'UN SIGNAL ECHANTILLONNE

7.2.1 Théorème de Shannon

7.2.1.1 Enoncé

Pour pouvoir reconstituer un signal continu à partir d'un train d'échantillons de période T , il faut que la pulsation d'échantillonnage $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$ soit au moins deux fois plus grande que la plus grande des pulsations contenues dans le signal que l'on échantillonne.

7.2.1.2 Exemples

La Figure 6.1 représente un cas où ce théorème est respecté (*au critère de précision des calculs près*) alors que la Figure 6.2 représente un cas où ce théorème n'est pas respecté.

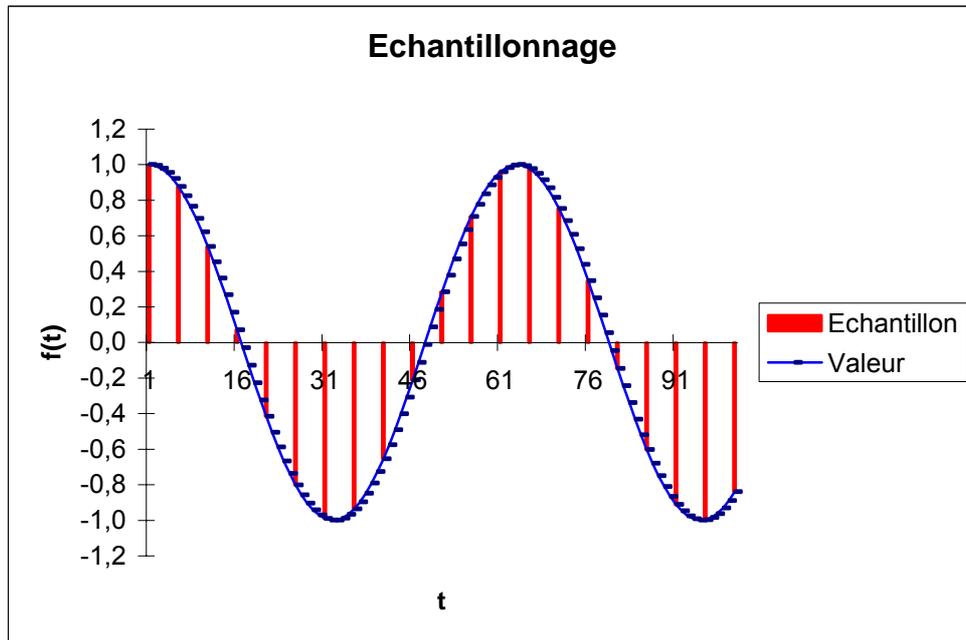


Figure 6.1 : Respect du théorème de Shannon

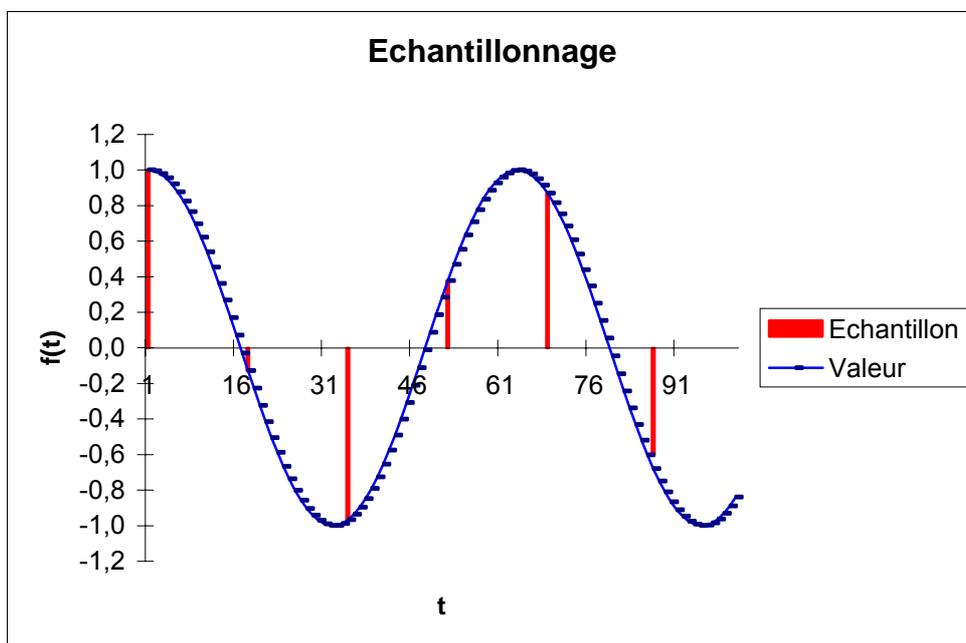


Figure 6.2 : Non respect du théorème de Shannon

7.2.1.3 Justification

Le facteur de **10 fois T_r** (temps de réponse du procédé en BF) en dessous duquel il n'est pas permis de descendre, se retrouve dans les constatations suivantes :

- Le théorème de Shannon suppose que le signal incident a un spectre limité en fréquence, **ce qui n'est pas le cas dans la plupart des signaux que l'on rencontre pratiquement. Un facteur supérieur à 2 est au moins nécessaire.**
- Pour obtenir une précision acceptable en régime transitoire, régime permanent à 5% (*response time*) ou 2% (*indication time*) d'un premier ordre, **un facteur de 3 à 4 est encore nécessaire.**

Le facteur de **100 fois T_r** (temps de réponse du procédé en BF) il est conseillé de se placer reste quant à lui dicté par les performances de **temps de réponse**.

Tous ces coefficients de sécurité découlent également du fait que les hypothèses ont été discutées sur des systèmes idéalisés du 1^{er} et du 2nd ordre qu'on rencontre rarement dans la nature.

7.2.2 Autre caractérisation de l'échantillonnage

7.2.2.1 Définitions

On caractérise très souvent un système :

- Par sa pulsation de coupure ω_0 définie comme la pulsation pour laquelle le module a baissé de n dB par rapport à la valeur statique ($\omega_0 \rightarrow 0$). En général n=3.
- Par la rapidité de décroissance de sa courbe d'amplitude :
-m dB/décade, m = 20, 40, 60....

Dans ce cas on peut déterminer en fonction de m la valeur de la pulsation d'échantillonnage $\omega_T = \frac{2\pi}{T}$ qui conduit à une certaine «erreur d'échantillonnage» définie comme le rapport de la valeur quadratique moyenne de l'erreur apparaissant sur le signal restitué à la valeur quadratique de celui-ci.

Exemple :

Pour un système dont le gain chute de -40dB/octave à partir de la fréquence de coupure à -3dB de 10Hz, un échantillonnage à 100Hz donne une erreur d'échantillonnage de 5%.

Si l'on tolère seulement une erreur de 1%, il faut alors échantillonner à 300Hz.

7.2.2.2 Exercice

Pour les systèmes du 1^{er} et du 2nd ordre (éventuellement le P.I.D.) tracer les courbes asymptotiques dans le plan de Bode afin de calculer les fréquences d'échantillonnage assurant une erreur de 5% et de 1%. Retrouver bien entendu sur la Figure correspondante que nous avons $\omega_T = 2\omega_M$ pour un signal idéalement borné à ω_M (ce qui correspond à $m=\infty$). Cette valeur est celle donnée par le théorème de Shannon.